I.T.I. "Modesto PANETTI" – B A R I

Via Re David, 186 - 70125 BARI ☎ 080-542.54.12 - Fax 080-542.64.32

Internet http://www.itispanetti.it – email : BATF05000C@istruzione.it

Temperatura di rumore - Figura di rumore – Margine di Fading
Rapporto Segnale/Rumore nei sistemi in ponte radio
Prof. Ettore Panella

In qualunque sistema di comunicazione, sia esso in cavo in rame o ottico oppure mediante collegamento radio con antenne (ponte radio) è fondamentale definire il rapporto **Segnale /Rumore** S/N (Signal/Noise).
Com'è noto, il rapporto S/N è definito come il rapporto tra la potenza relativa al segnale utile S rispetto a quella del rumore N. Tale rapporto deve essere sufficientemente elevato per consentire una corretta ricostruzione dell'informazione trasmessa.
Il rumore è un qualunque segnale spurio che si sovrappone a quello utile. I rumori si classificano in **parametrici e additivi**. I parametrici sono dovute alle variazioni dei parametri dei dispositivi utilizzati come, ad esempio, la dispersione delle caratteristiche e l'invecchiamento dei componenti. I rumori additivi sono quelli indotti dall'ambiente esterno.
Ricordiamo (Cap V del testo Panella – Spalierno "Corso di Telecomunicazioni" Vol. I Ed. Cupido) che secondo la formula di Shannon la capacità C, ovvero la velocità V_t di trasmissione dei dati, di un canale è funzione sia della banda trasmessa B che del rapporto S/N:

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \qquad [\text{bps}]$$

Tale relazione, però, nulla ci dice sul numero di livelli o stati M da impiegare nella tecnica di modulazione adottata. Per ricavare il numero di livelli o stati M si deve utilizzare la formula di Nyquist:

$$C = 2B \cdot \log_2 M$$

Esercizio n. 1

Si desidera operare alla velocità di trasmissione V_t = C = 1Mbps in un canale caratterizzato da una banda trasmissiva B = 100 KHz. Calcolare il rapporto S/N minimo e il numero di livelli.

Soluzione

Dalla formula di Shannon si ricava:

$$\frac{S}{N} = 2^{C/B} - 1 = 1023$$

Ovvero:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10\text{Log}1023 \cong 30 \text{ dB}$$

Dalla formula di Nyquist si ricava:

$$M = 2^{C/2B} = 2^5 = 32 \text{ livelli}$$

E quindi ciascun simbolo è costituito da:

$$N_{bit} = \log_2 M = 5 \text{ bit}$$

La velocità di segnalazione, ovvero il numero di simboli trasmessi a secondo risulta:

$$V_S = \frac{V_s}{N_{bit}} = 200\,\text{Kbaud}$$

Il tempo associato a ciascun simbolo vale:

$$T_{\sin b} = \frac{1}{V_S} = 5\mu s$$

In conclusione per trasmettere 1Mbps in un canale con banda B = 100 KHz è necessario un rapporto Segnale/Rumore maggiore di 30 dB e si deve impiegare una tecnica di modulazione multilivello a 32 stati in grado di trasmettere nel tempo T_{simb} 5 bit.

---

1. Valutazione del rapporto Segnale/ Rumore in ricezione

Nei sistemi di telecomunicazioni riveste particolare importanza il **rumore termico** noto anche come **rumore Johnson**. Tale rumore si genera a causa dell'agitazione termica delle cariche elettriche presenti in un dispositivo. Ad esempio, una resistenza R, anche se non collegata ad alcun generatore, sviluppa ai suoi capi una tensione di rumore V_n dovuta all'agitazione termica degli elettroni.
Il valore efficace vale:

$$V_n = \sqrt{4 \cdot K \cdot T \cdot B \cdot R}$$

Dove si è indicato con:

- K la costante di Botzman pari a k $= 1.38 \cdot 10^{-23}$ [Watt/°K*Hz]
- T la temperatura in gradi Kelvin a cui si trova il resistore
- B la banda passante entro cui si misura il rumore
- R il valore della resistenza in Ω

Ad esempio, la tensione di rumore termico in un'antenna è dell'ordine di pochi $dB_{\mu V}$.
In generale se si considera un generico sistema di ricezione all'ingresso dell'apparato ricevente, oltre al segnale utile, giunge un segnale di rumore che non è in alcun modo eliminabile. Tale rumore è dovuto all'effetto Johnson. Si dimostra che la potenza di rumore associata N_i assume il valore:

$$N_i = K \cdot T \cdot B \qquad [W]$$

La temperatura T, se non specificata, si pone pari al valore di riferimento:

$$T_g = 290°K \qquad \text{(corrispondente a 17° C)}$$

Si ha:

$$N_i = K \cdot T_g \cdot B \qquad [W]$$

Si definisce **densità spettrale di potenza di rumore**:

$$S(f) = \frac{N_i}{B} = K \cdot T_g \qquad [W/Hz]$$

Si osservi che la densità spettrale di potenza assume lo stesso valore a tutte le frequenze e dipende esclusivamente dalla temperatura dell'apparato ricevente.
Esprimendo la densità spettrale di potenza di rumore in dBm si ottiene un valore costante, alla temperatura di riferimento, pari a:

$$N_o = 10 \mathrm{Log} \frac{KT_g}{10^{-3}} = -174 \, \mathrm{dBm}$$

La presenza del rumore termico si estende su tutta la gamma di frequenze. Il rumore termico si può "vedere" e "sentire" se, ad esempio, si sintonizza un apparato TV su una frequenza priva di canale utile. In tali condizioni si "sente" un rumore di fondo e sullo schermo del televisore si "vedono" punti luminosi che fluttuano in modo casuale. Per tale motivo il rumore termico è noto anche come **rumore bianco** in analogia con la luce bianca che contiene tutte le componenti di colore.
Ritornando all'esempio del ricevitore e supponendo che il sistema di ricezione sia assimilabile ad un quadripolo caratterizzato da un guadagno in potenza G. In uscita al ricevitore sarà presente una potenza di rumore N_u pari a:

$$N_u = G \cdot N_i + N_a \qquad (1)$$

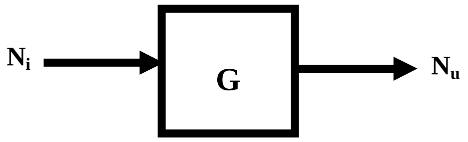

Fig . 1.

Il primo termine tiene conto della potenza di rumore dovuta alla temperatura di riferimento d'ingresso T_g. Il secondo termine N_a è dovuto alla potenza di rumore interna dell'apparato ricevente e non dipende dalla temperatura di riferimento.
Il termine N_a si può pensare generato da una **temperatura equivalente di rumore** T_a presente in entrata. In tale ipotesi la precedente relazione si può scrivere:

$$N_u = K \cdot T_g \cdot B \cdot G + K \cdot T_a \cdot B \cdot G = K \cdot B \cdot G \cdot (T_g + T_a) \qquad (2)$$

Ovvero:

$$N_u = K \cdot B \cdot G \cdot T_g \left(1 + \frac{T_a}{T_g}\right)$$

La quantità:

$$T_{si} = T_g + T_a$$

è denominata **temperatura di sistema**.
La temperatura equivalente di rumore fornisce il valore di cui si deve aumentare la temperatura T_g per avere in uscita dal quadripolo la stessa potenza di rumore.
Il termine:

$$F = \left(1 + \frac{T_a}{T_g}\right)$$

noto come **cifra di rumore,** è un parametro caratteristico del sistema di ricezione ed è fornito dal costruttore dell'apparato.

Si osservi che per un quadripolo ideale $T_a = 0$ ed $F = 1$. La cifra di rumore è spesso fornita in dB. Si può scrivere:

$$F_{dB} = 10 \mathrm{Log} F$$

Nota la cifra di rumore è possibile ricavare il valore di T_a:

$$T_a = (F-1) \cdot T_g$$

La potenza di rumore in uscita si può scrivere:

$$N_u = K \cdot T_g \cdot B \cdot G \cdot F = N_i \cdot G \cdot F$$

Si può definire la **potenza di rumore equivalente in entrata** al ricevitore dividendo la precedente relazione per il guadagno G. Si ha:

$$N_{ieq} = K \cdot B \cdot T_g \cdot F = N_i \cdot F \qquad (3)$$

La potenza di rumore in uscita vale:

$$N_u = N_{ieq} \cdot G$$

Operando in dB si può scrivere:

$$\left(N_{ieq}\right)_{dBm} = 10 \mathrm{Log} \frac{K \cdot T_g}{10^{-3}} + 10 \mathrm{Log} B + F_{dB} = -174 + 10 \mathrm{Log} B + F_{dB} \qquad (4)$$

Indicando con S_i il livello di potenza del segnale in ingresso al ricevitore in dBm si ricava che il rapporto Segnale/Rumore del quadripolo si può calcolare:

$$\left(\frac{S_u}{N_u}\right)_{dB} = \left(\frac{S_i \cdot G}{N_{ieq} \cdot G}\right)_{dB} = \left(\frac{S_i}{N_{ieq}}\right)_{dB} = \left(S_i\right)_{dBm} - \left(N_{ieq}\right)_{dBm}$$

Si osservi, inoltre, che:

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{G \cdot S_i}{N_i \cdot G \cdot F} = \frac{S_i}{N_i \cdot F}$$

e quindi:

$$F = \frac{S_i / N_i}{S_u / N_u}$$

Pertanto, la figura di rumore F indica di quanto peggiora il rapporto S/N in uscita rispetto a quello in entrata al quadripolo.

2. Cascata di quadripoli

Consideriamo due quadripoli collegati in cascata caratterizzati ciascuno da un guadagno G, figura di rumore F e temperatura di rumore T_a. Tenendo conto della (1) applicata al secondo blocco, si ha:

$$N_u = G_2 \cdot N_u' + N_{a2}$$

Dove $N_{a2} = K \cdot T_{a2} \cdot B \cdot G_2$

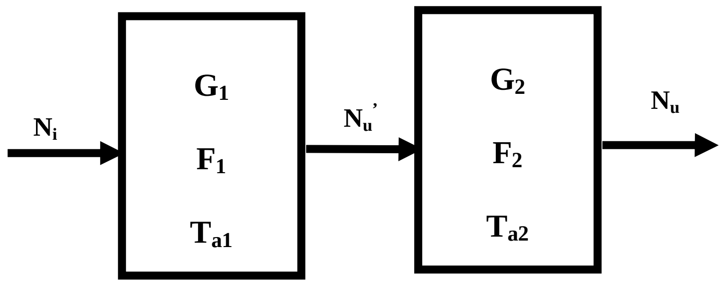

Fig.2 Collegamento in cascato di 2 quadripoli.

Si ricava:

$$N_u = N_u' \cdot G_2 + K \cdot T_{a2} \cdot B \cdot G_2$$

Applicando la (2) al primo blocco si ricava:

$$N_u' = K \cdot B \cdot G_1 (T_g + T_{a1})$$

Quindi:

$$N_u = KBG_1G_2 (T_g + T_{a1}) + KT_{a2} \cdot B \cdot G_2$$

$$N_u = K\ B\ G_1\ G_2 \left[T_g + T_{a1} + \frac{T_{a2}}{G_1} \right]$$

$$N_u = K\ B\ G_1\ G_2\ [T_g + T_{atot}] \qquad (5)$$

In definitiva la cascata dei 2 quadripoli presenta una **temperatura equivalente di rumore totale**:

$$T_{atot} = T_{a1} + \frac{T_{a2}}{G_1}$$

In generale, si dimostra, che per n quadripoli in cascata vale la seguente relazione:

$$T_{a\,tot} = T_{a1} + \frac{T_{a2}}{G_1} + \frac{T_{a3}}{G_1 \cdot G_2} + \frac{T_{a4}}{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}$$

È facile verificare che il rumore complessivo dipende fortemente dai primi stadi. Infatti, se G_1 è molto grande la temperatura di rumore totale dipende solo dal primo stadio: $T_{atot} \cong T_{a1}$.
Riprendendo il caso di due quadripoli in cascata, dalla (5) si ricava:

$$N_u = K\ B\ G_1\ G_2 \left[T_g + T_{a\,tot} \right] = K\ B\ G_1\ G_2\ T_g \left[1 + \frac{T_{a\,tot}}{T_g} \right] \qquad (6)$$

La **figura di rumore totale** risulta pari a:

$$F_{tot} = 1 + \frac{T_{a\,tot}}{T_g} = F_1 + \frac{T_{a\,2}}{T_g \cdot G_1}$$

La **temperatura equivalente di rumore totale** vale:

$$T_{atot} = (F_{tot} - 1) \cdot T_g$$

Inoltre, essendo: $T_{a2} = (F_2 - 1) \cdot T_g$. La **figura di rumore totale** si può scrivere:

$$F_{tot} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}$$

Dalla (6) si ricava:

$$N_{ieq} = \frac{N_u}{G_1 \cdot G_2} = K \cdot T_g \cdot B \cdot F_{tot}$$

In generale per n quadripoli in cascata vale la seguente **formula di Friis**:

$$F_{tot} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 \cdot G_2} + \frac{F_4 - 1}{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} + \ldots\ldots\ldots$$

In definitiva, se il ricevitore è costituito da una cascata di n quadripoli valgono le seguenti relazioni generali:

Figura di rumore totale:

$$F_{tot} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 \cdot G_2} + \frac{F_4 - 1}{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} + \ldots\ldots\ldots$$

Temperatura equivalente di rumore totale:

$$T_{a\,tot} = T_{a1} + \frac{T_{a2}}{G_1} + \frac{T_{a3}}{G_1 \cdot G_2} + \frac{T_{a4}}{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} = (F_{tot} - 1) \cdot T_g$$

Potenza di rumore equivalente in entrata:

$$N_{ieq} = K \cdot T_g \cdot B \cdot F_{tot} = N_i \cdot F_{tot}$$

$$(N_{ieq})_{dBm} == -174 + 10LogB + F_{totdB}$$

Rapporto Segnale/Rumore:

$$\left(\frac{S_u}{N_u}\right)_{dB} = \left(\frac{S_i}{N_{ieq}}\right)_{dB} = (S_i)_{dBm} - (N_{ieq})_{dBm}$$

3. **Margine di Fading**

Nei collegamenti via etere all'ingresso del ricevitore il segnale giunge con improvvise e casuali variazioni di breve durata sia in ampiezza che in fase. Tali fluttuazioni sono note come **fading** o **evanescenza**. Il fenomeno è dovuto a varie cause.
Il **fading per attenuazione** è dovuto alle variazioni fisiche dell'atmosfera che producono diverse attenuazioni del segnale in funzione della frequenza.

Il **fading per interferenza** è dovuto all'interferenza tra i diversi segnali che partendo dal trasmettitore seguono molteplici percorsi prima di giungere al ricevitore. I segnali ricevuti hanno ampiezze e fase continuamente variabili poiché dipendono dallo stato fisico dell'atmosfera (pioggia, temporali, ecc) dalla natura del suolo (mare, monti, ecc) e dal cammino che le onde elettromagnetiche seguono (onde dirette, onde riflesse dal suolo, ecc).
I ricevitori sono dotati di opportuni sistemi di regolazione automatica atti a compensare ma non eliminare il fenomeno di fading.
Per compensare tale fenomeno è buona norma aumentare il livello di potenza del segnale di una quantità detta **margine di fading M_F** in modo da garantire per tutto il tempo del collegamento un sufficiente rapporto S/N. Il valore di M_F necessario a garantire una prefissata affidabilità del collegamento è stato valutato sia mediante analisi sperimentali che teoriche. Per collegamenti satellitari, che operano a frequenza inferiori a 10GHz, un margine di fading M_F = 6 dB risulta sufficiente. Per collegamenti in ponte radio terrestri il margine di fading si valuta supponendo che l'evanescenza casuale segue la *distribuzione di Rayleigh*. In tale ipotesi, si definisce disponibilità del collegamento D il parametro:

$$D = e^{-\frac{P_{min}}{P_R}}$$

Dove P_{min} è la potenza minima che il ricevitore è in grado di riconoscere e P_R è quella effettivamente ricevuta. Il margine di fading si valuta mediante la relazione:

$$(M_F)_{dB} = -10 \cdot \log|\ln D|$$

Nella seguente tabella 1 si riportano alcuni valori caratteristici.

Tabella 1. Margine di fading

Disponibilità D del collegamento (%)	Margine di fading M_F dB
90	10
99	20
99.9	30
99.99	40
99.999	50

Il parametro D indica la percentuale di tempo, rispetto al tempo complessivo del collegamento, entro cui il rapporto S/N è sufficientemente elevato per compensare gli effetti del fading e garantire l'affidabilità della ricezione .

Esercizio 2

Un segnale della potenza in antenna di P_T = 20 W è inviato tramite ponte radio ad una stazione ricevente. Il ricevitore opera alla temperatura ambiente, T_g = 290°K, ed è caratterizzato da una banda di frequenza B = 2MHz e una figura di rumore di F_{dB} = 8dB.

Determinare il rapporto segnale rumore in ricezione sapendo che:

- l'attenuazione dello spazio libero del collegamento è A_{SL} = 106dB
- l'attenuazione dei cavi di collegamento del ricevitore A_C = 6 dB
- Guadagno dell'antenna ricevente e G_R = 20 dB
- il margine di fading è fissato a M_F = 18 dB, corrispondente ad una affidabilità di propagazione del 99%.

Risoluzione

Si esprime la potenza in trasmissione in dBm:

$$(P_T)_{dBm} = 10 \cdot \text{Log}\frac{P_T}{10^{-3}} = 43\,\text{dBm}$$

Tenendo conto dei dati del problema, si ricava che il segnale all'ingresso del ricevitore vale:

$$(S_i)_{dBm} = (P_T)_{dBm} + G_R - A_{SL} - A_C - M_F = -67\text{ dBm}$$

La potenza di rumore equivalente in entrata al ricevitore vale:

$$\left(N_{ieq}\right)_{dBm} = 10\text{Log}\frac{K \cdot T_g}{10^{-3}} + 10\text{LogB} + F_{dB} = -174 + 10\text{LogB} + F_{dB} = -103\text{ dBm}$$

In definitiva, il rapporto segnale rumore al ricevitore risulta:

$$\left(\frac{S_i}{N_{ieq}}\right)_{dB} = \left(S_i\right)_{dBm} - \left(N_{ieq}\right)_{dBm} = -67 - (-103) = 36\,\text{dB}$$

Esercizio 3

Un trasmettitore fornisce un segnale con una potenza pari a 2W ad una antenna parabolica con un guadagno di 35dB.
Il ricevitore si trova ad una distanza di 50Km e lavora ad una frequenza f = 12GHz, con una banda passante B = 10MHz .

Figura 3. Sistema ricetrasmittente.

Sapendo che la figura di rumore F del ricevitore vale complessivamente 4dB, determinare:

1. La potenza del segnale in ingresso al ricevitore Si, in dB_m e in scala lineare, la tensione in ricezione su una resistenza R = 50 Ω ;
2. La potenza di rumore equivalente all'ingresso del ricevitore N_{ieq} in dBm;
3. Il rapporto Segnale/Rumore $\frac{Su}{Nu}$ in uscita al ricevitore in dB;
4. Il guadagno G che deve avere un amplificatore, supposto ideale, posto al ricevitore affinché in ricezione si abbia una potenza Pr pari a 150pW. Valutare il nuovo rapporto S/N con l'inserimento dell'amplificatore;
5. Determinare il diametro dell'antenna parabolica trasmittente, sapendo che l'efficienza ηa è pari a 0.5.

Risoluzione

Quesito n° 1.

La potenza del segnale in ingresso al ricevitore in dBm si calcola con la seguente formula:

$$(P_R)_{dBm} = (Si)_{dBm} = (P_T)_{dBm} + (G_{ant})_{dB} - (A_{SL})_{dB}$$

Il termine:

$$EIRP = (P_T)_{dBm} + (G_{ant})_{dB}$$

rappresenta l'effettiva Potenza irradiate nello spazio EIRP (Effective Isotropic Radiation Power).
Conoscendo la potenza trasmessa in W , si ricava la potenza trasmessa in dBm $(Pt)_{dBm}$:

$$(P_T)_{dBm} = 10 Log \frac{P_T}{10^{-3}} = 10 Log \frac{2}{10^{-3}} = 33 dBm$$

L'attenuazione dello spazio libero in dB $(A_{SL})_{dB}$ si ricava applicando la nota relazione:

$$(A_{SL})_{dB} = 20 Log \frac{4 \cdot \pi \cdot r}{\lambda}$$

Dove r è la distanza tra trasmettitore e ricevitore di 50Km, e λ la lunghezza d'onda del segnale, data dal rapporto della velocità della luce e la frequenza del trasmettitore:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{12 \cdot 10^9} = 0.025 m$$

Si ricava l'attenuazione dello spazio libero:

$$(A_{SL})_{dB} = 20 Log \frac{4 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 10^3}{0.025} = 148 dB$$

La potenza del segnale in ingresso al ricevitore in dBm vale :

$$(Si)_{dBm} = 33 + 35 - 148 = -80 dBm$$

Si calcola la stessa potenza in scala lineare:

$$P_i = Si(W) = 10^{\frac{(Si)dBm}{10}} \cdot 10^{-3} = 10^{\frac{-80}{10}} \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-12} = 10 pW$$

La tensione in ingresso risulta:

$$V_i = \sqrt{P_i \cdot R} = 22.36 \mu V$$

A cui corrisponde un livello di tensione in dBμv pari a:

$$L_{dB\mu v} = 20 Log \frac{V_i}{10^{-6}} = 26.98\, dB_{\mu v}$$

Quesito n°2.

La potenza di rumore equivalente all'ingresso del ricevitore N_{ieq} si calcola con la seguente formula:

$$N_{ieq} = K \cdot T_g \cdot B \cdot F$$

Dove K·Tg è il prodotto tra la costante di Boltzman $K = 1.38 \cdot 10^{-23}[\text{Watt}/°K \cdot Hz]$, e la temperatura di riferimento di 17°C che si esprime in gradi Kelvin: T_g = 290°K; questo prodotto è un termine costante che si definisce densità spettrale di potenza di rumore alla **temperatura di riferimento di 290 °K**.; B ed F sono, rispettivamente, la banda passante e la figura di rumore del ricevitore fornita dal costruttore. Si calcola la potenza di rumore equivalente all'ingresso del ricevitore in dBm :

$$(N_{ieq})_{dBm} = 10\text{Log}\frac{K \cdot T_g}{10^{-3}} + 10\text{Log}B + F_{dB} = -174 + 10\text{Log}10 \cdot 10^6 + 4 = -174 + 70 + 4 = -100\text{dBm}$$

Quesito n°3.

Il rapporto Segnale/Rumore in uscita $\left(\frac{S_u}{N_u}\right)_{dB}$ è pari a $\left(\frac{S_i}{N_{ieq}}\right)_{dB}$, perciò il rapporto S/N in uscita al ricevitore vale:

$$\left(\frac{S_i}{N_{ieq}}\right)_{dB} = (S_i)_{dBm} - (N_{ieq})_{dBm} = -80 - (-100) = 20\text{dB}$$

Quesito n°4.

Affinché in ricezione si abbia una potenza Pr pari a 150pW, è necessario inserire all'ingresso del ricevitore un amplificatore ideale (cioè che non introduca ulteriore rumore) con un guadagno G_A in modo tale che:

$$S_i(W) \cdot G_A = 150\text{pW}$$

Dalla precedente si ricava :

$$G_A = \frac{150 \cdot 10^{-12}}{S_i(W)} = \frac{150 \cdot 10^{-12}}{10 \cdot 10^{-12}} = 15$$

G_A in dB vale:

$$(G_A)_{dB} = 10\text{Log}G_A = 10\text{Log}15 = 11.76\text{dB}$$

In definitiva inserendo l'amplificatore con guadagno 11.76dB al ricevitore, in uscita si ottiene un rapporto S/N pari a:

$$\left(\frac{S_u}{N_u}\right)_{dB} = \left(\frac{S_i}{N_{ieq}}\right)_{dB} + (G_A)_{dB} = (S_i)_{dBm} - (N_{ieq})_{dBm} + (G_A)_{dB} = -80 - (-100) + 11.76 = 31.76\text{dB}$$

Tale rapporto S/N è accettabile poiché supera i 25dB, che costituisce il rapporto S/N minimo tipico, per una accettabile ricezione.

Quesito n°5.

Per determinare il diametro dell'antenna trasmittente si deve ricordare che il guadagno in dB di un'antenna parabolica vale:

$$(G_{ant})_{dB} = 10\text{Log}\frac{\pi^2 \cdot \eta_a \cdot D^2}{\lambda^2}$$

Dove η_a è l'efficienza dell'antenna parabolica pari a 0.5.
Dalla precedente si ricava l'espressione del diametro dell'antenna D.

$$D = \sqrt{\frac{\lambda^2 \cdot 10^{\frac{(Gant)dB}{10}}}{\pi^2 \cdot \eta_a}} = \sqrt{\frac{0.025^2 \cdot 10^{\frac{35}{10}}}{\pi^2 \cdot 0.5}} = 632 \cdot 10^{-3} = 63.2 \cdot 10^{-2} = 63.2\text{cm.}$$

4. Trasmissioni numeriche con modulazioni digitali

In un collegamento numerico la trasmissione tra apparato trasmittente e ricevente può avvenire o in **banda base** o mediante **modulazioni digitali**.
Nel primo caso il segnale digitale generato dal trasmettitore subisce una opportuna variazione di codice per meglio adattare il segnale al canale di trasmissione e consentire una più semplice ricostruzione della sequenza binaria trasmessa. Ad esempio nei collegamenti in rete locale si utilizza il codice Manchester, mentre nei sistemi in tecnica PCM si impiegano i codici AMI, HDB3 e CMI.
Nei sistemi che impiegano le modulazioni digitali, come nei modem, nei ponti radio digitali, nella TV digitale terrestre, ecc, il segnale modulante è di tipo numerico e deve essere modulato con una portante sinusoidale per poter essere trasmesso nel canale di trasmissione.
Le modulazioni maggiormente utilizzate sono quelle digitali multilivello:
M-ASK, M-FSK, M-PSK e la M-QAM.
Per approfondimenti sulle trasmissioni in banda base e sulle tecniche di modulazione si rimanda al testo Panella – Spalierno "Corso di Telecomunicazioni" Vol. II Ed. Cupido.
In tali modulazioni ciascun simbolo è in grado di trasportare un numero di bit N_{bit} anche elevato pari a:

$$N_{bit} = \log_2 M$$

La qualità del collegamento di tali sistemi di trasmissione è decritta dal tasso d'errore BER (Bit Error Rate). Tale parametro è definito, come è noto, dal rapporto tra il numero di bit errati in ricezione rispetto al numero totale di bit ricevuti.
Nella pratica, in ambiente con rumore bianco statisticamente casuale (distribuzione gaussiana), si introduce il concetto di probabilità di errore P(e), ovvero della valutazione del BER, in funzione del rapporto S/N al ricevitore. In formule, si definisce probabilità di errore sul bit:

$$BER = P(e) = \frac{N_{\text{bit errati}}}{N_{\text{bit totali}}}$$

Nelle trasmissioni multilivello la "**distanza**" in termini di ampiezza e fase tra i simboli diminuisce all'aumentare dei livelli ed è evidente, che a parità di rapporto S/N, la probabilità di errore P(e) aumenta.
Il rapporto segnale/rumore in ricezione nei sistemi numerici si esprime nel seguente modo:

$$\frac{S_i}{N_{ieq}} = \frac{E_b \cdot V_t}{N_0 \cdot B} = \frac{E_b}{N_o} \cdot D_i \qquad (7)$$

dove:

- E_b è l'energia media di un bit
- V_t è la velocità di trasmissione (bit rate)
- N_0 è la densità spettrale di rumore supposto bianco
- B è la banda di frequenza del canale

Il termine:

$$D_i = \frac{V_t}{B} \qquad [bps/Hz]$$

È un fattore di merito della trasmissione ed è definito **densità di informazione** o **efficienza di spettrale.**
Tale parametro rappresenta la quantità d'informazione nell'unità di tempo normalizzata alla banda passante; cioè quanti bps possono essere trasmessi nell'unità di banda.
La formula di Shannon relativa alla capacità di un canale diventa:

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{E_b \cdot V_t}{N_0 \cdot B}\right) \qquad [bps]$$

<u>**Assumendo C = V_t**</u> si può scrivere:

$$\frac{V_t}{B} = \log_2\left(1 + \frac{E_b \cdot V_t}{N_0 \cdot B}\right)$$

Si ricava il rapporto $(E_b/N_0)_{dB}$ in funzione della densità di informazione:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 10\log\left(\frac{2^{D_i} - 1}{D_i}\right)$$

Il rapporto $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}$ è noto come **efficienza energetica.**

Ad esempio:

- se D_i = 1 si ricava $(E_b/N_0)_{dB}$ = 0 dB
- se D_i = 2 si ricava $(E_b/N_0)_{dB}$ = 1.8 dB
- se D_i = 3 si ricava $(E_b/N_0)_{dB}$ = 3.7 dB

Dalla precedente espressione è facile dimostrare che il limite per $B \to \infty$ equivale al limite per $D_i \to 0$ e vale (applicare il teorema di de l'Hôpital):

$$(E_b/N_0)_{dB} = 10\log(\ln 2) = -1.59 \text{ dB}.$$

Questo valore minimo del rapporto $(E_b/N_0)_{dB}$ è noto come **limite di Shannon**.
In altre parole, è sempre possibile, teoricamente, determinare un opportuno metodo di modulazione multilivello in grado di recuperare l'informazione di sorgente priva di errori purché il rapporto $(E_b/N_0)_{dB}$ all'ingresso del ricevitore sia maggiore di –1.59 dB.
I risultati precedenti sono dedotti dal cosiddetto **teorema della codifica di Shannon.** Tale teorema afferma che se in un canale di capacità C una informazione è trasmessa alle velocità V_t tale che:

$$V_t \leq C$$

allora è sempre possibile determinare un sistema di codifica in grado di rendere la probabilità di errore in ricezione piccola a piacere.
Viceversa se $V_t > C$ non è possibile trasmettere l'informazione senza errori.
Per migliorare il processo di demodulazione i sistemi multilivello utilizzano la **codifica a traliccio TCM** (Trellis Code Modulation) con cui è possibile avvicinarsi ai limiti di Shannon.
Ricordiamo che la modulazione TCM è una tecnica utilizzata per gestire la correzione automatica degli errori FEC (Forward Error Correction). Il metodo consiste nel generare uno o più bit ridondanti a partire dai bit informativi mediante il **codici convoluzionali**.
In tal caso dei bit che costituiscono i simboli della costellazione multilivello, alcuni sono informativi, altri sono impiegati per la correzione degli errori.
Per poter valutare l'effettiva probabilità di errore P(e) in ricezione in una trasmissione con modulazione digitale si deve valutare il rapporto E_b/N_0 in funzione del rapporto segnale/rumore e della densità di informazione.
Dalla (7) operando in dB si ottiene la seguente relazione che consente di calcolare il rapporto E_b/N_0:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = \left(\frac{S_i}{N_{ieq}}\right)_{dB} - 10 \cdot \log D_i$$

La teoria matematica del calcolo della probabilità di errore è complessa e, pertanto, i confronti tra i diversi tipi di modulazione e la valutazione della P(e) sono fatti per via grafica utilizzando particolari grafici disponibili sui manuali tecnici. In fig. 4 si riporta l'andamento della probabilità di errore P(e) in funzione del rapporto $(E_b/N_0)_{dB}$.

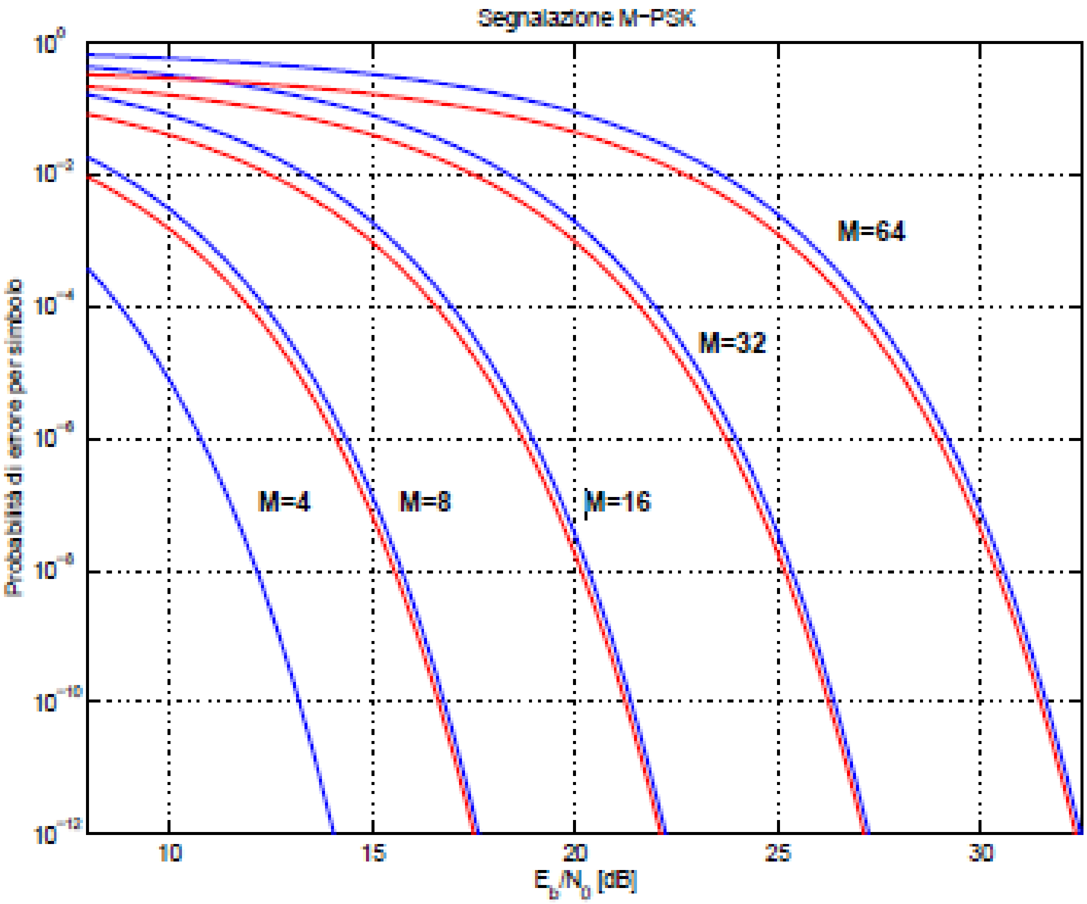

Fig. 4 a) Probabilità del'errore P(e) in funzione del rapporto E_b/N_0 [dB] per le modulazioni M-PSK.

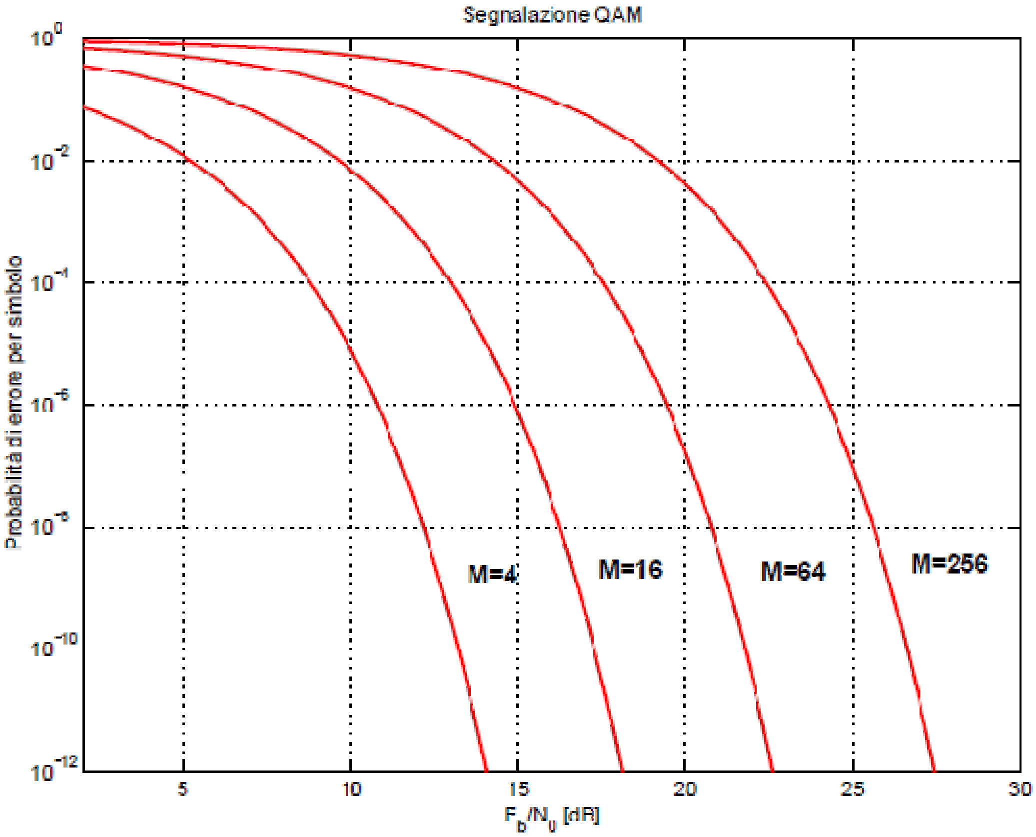

Fig. 4 b) Probabilità del'errore P(e) in funzione del rapporto E_b/N_0 [dB] per le modulazioni M-QAM.

Le precedenti figure ci dicono, come ovvio, che all'aumentare del rapporto E_b/N_o diminuisce la probabilità di errore nella trasmissione dati. Inoltre si osserva che, a parità di probabilità di errore, i sistemi a più alta velocità di trasmissione richiedono un maggior rapporto E_b/N_o e quindi un più elevato rapporto segnale/rumore.

Da un punto di vista matematico si può dimostrare che la probabilità d'errore per una modulazione M-QAM si valuta con la seguente espressione:

$$P(e) = \frac{2(\sqrt{M} - 1)}{\sqrt{M} \cdot \log_2 \sqrt{M}} \cdot \mathrm{erfc}\sqrt{\frac{3E_b \log_2 M}{2N_o(M-1)}} \tag{8}$$

Dove **la funzione degli errori complementare erfc** è definita dalla relazione:

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

In fig. 5 si riporta l'andamento della funzione erfc(x).

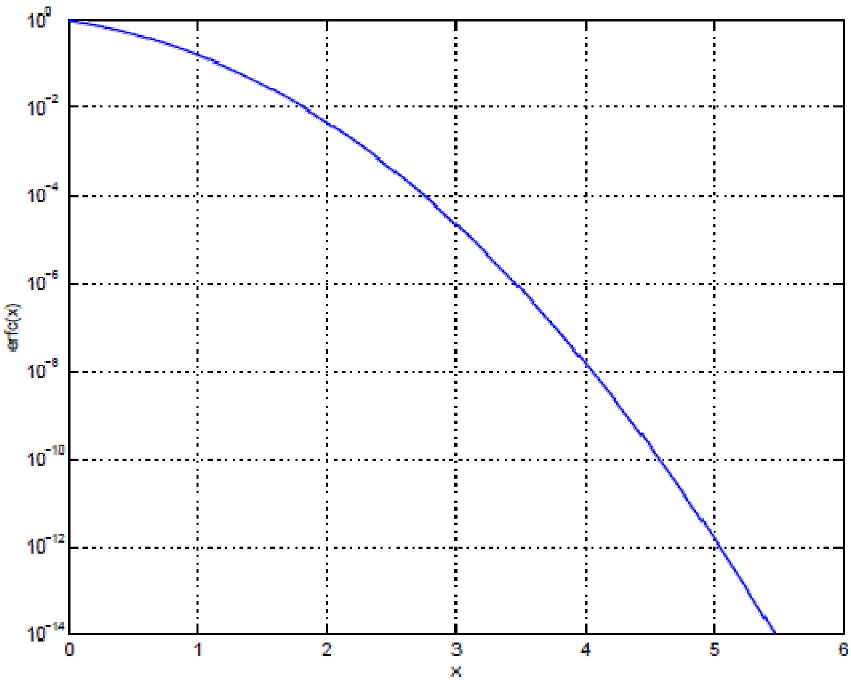

Fig. 5. Funzione erfc(x).

Esercizio 4

In un sistema di trasmissione in ponte radio numerico è noto che la velocità di trasmissione dei dati è V_t = 155.520 Mbps e si opera con modulazione 64-QAM. Sapendo che il rapporto segnale/rumore al ricevitore vale: $\left(\frac{S_i}{N_{ieq}}\right)_{dB} = 26\,\text{dB}$, determinare la probabilità di errore P(e).

Risoluzione

Essendo la modulazione a M = 64 stati consegue che la velocità di segnalazione vale:

$$V_s = \frac{V_t}{\log_2 M} = \frac{155.520 \cdot 10^6}{6} = 25.92\,\text{Mbaud}$$

La banda minima teorica vale $B_{min} = V_s$ ma nella pratica al ricevitore è presente un **filtro a coseno rialzato** con coefficiente di roll-off R, tipico, pari a R = 0.5 (si veda il Cap. 5 del testo Panella – Spalierno "Corso di Telecomunicazioni" Vol. I Ed. Cupido). Si ha:

$$B = V_s(1 + R)$$

In definitiva si ricava:

$$B = \frac{3}{2} \cdot V_s = 38.88\,\text{MHz}$$

L'efficienza spettrale vale:

$$D_i = \frac{V_t}{B} = \frac{2}{3}\log_2 M = 4$$

mentre l'efficienza energetica risulta pari a:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = \left(\frac{S_i}{N_{ieq}}\right)_{dB} - 10 \cdot \log D_i = 26 - 6 = 20 \text{ dB}$$

Dal grafico di fig. 4b si ricava una probabilità P(e) dell'orine di 10^{-7}, ovvero 1 bit errato per ogni 10 milioni di bit ricevuti. Lo stesso risultato si ottiene applicando la (8).

Esercizio 5

Un ponte radio numerico opera in tecnica 16-QAM con velocità di trasmissione di 54Mbps e frequenza della portante di 2 GHz. La potenza emessa dal trasmettitore è P_t = 2W. L'attenuazione dello spazio A_{SL} = 120 dB, mentre la somma delle attenuazioni dei cavi di collegamento, dei connettori e del margine di fading valgono complessivamente 60 dB.
La figura di rumore del ricevitore è F_{dB} = 7dB e le due antenne utilizzate per la trasmissione hanno un guadagno di 30dB ciascuna. Si desidera che la probabilità di errore in ricezione P(e) sia minore di 10^{-6}. Determinare:

- La velocità di segnalazione V_s
- La banda passante B
- La densità di informazione D_i
- Il guadagno G_{dB} di un eventuale amplificatore da inserire in ricezione per soddisfare la P(e) richiesta
- La distanza r tra gli apparati di ricetrasmissione

Risoluzione

La velocità di segnalazione vale:

$$Vs = \frac{Vt}{\lg_2 M} = \frac{54 \cdot 10^6}{\lg_2 16} = \frac{54 \cdot 10^6}{4} = 13.5\text{Mbaud}$$

La banda passante si può assumere pari a:

$$B = \frac{3}{2} \cdot Vs = \frac{3}{2} \cdot 54 \cdot 10^6 = 19.3\text{MHz}$$

Si determina la densità di informazione:

$$D_i = \frac{Vt}{B} = \frac{54 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^6} = 2.79[\text{bps/Hz}] \qquad (D_i)_{dB} = 10\text{Log}D_i = 10\text{Log}\,2.79 = 4.45\text{dB}$$

Il rumore equivalente presente all'ingresso del ricevitore, supponendo la temperatura pari a 17°C, risulta:

$$N_{ieq} = -174 + 10LogB + F_{dB} = -174 + 73 + 7 = -94.2dB_m$$

Per ottenere un BER minore uguale a 10^{-6} è necessaria un efficienza energetica pari almeno a 15dB, come si può dedurre dalla fig.4b. pertanto, il rapporto Segnale/Rumore deve essere:

$$\left(\frac{Si}{N_{ieq}}\right)_{dB} \geq \left(\frac{Eb}{N_0}\right)_{dB} + (Di)_{dB} \qquad \text{da cui:} \qquad \left(\frac{Si}{N_{ieq}}\right)_{dB} \geq 19.3dB$$

ovvero:

$$(S_i)_{dBm} - (N_{ieq})_{dBm} \geq 19.3dB$$

Si ricava:

$$(S_i)_{dBm} \geq 19.3 - 94.2dBm \geq -74.75dBm$$

Per determinare l'eventuale guadagno in potenza dell'amplificatore da inserire in ingresso al ricevitore si fa riferimento all'**equazione fondamentale della trasmissione**:

$$(L_{PRX})_{dBm} = (L_{PTX})_{dBm} + \sum G - \sum \alpha$$

Ovvero: il livello della potenza in ricezione è pari al livello della potenza in trasmissione più la somma di tutti guadagni meno la somma di tutte le attenuazioni.

Il livello della potenza del trasmettitore in dBm vale:

$$(L_{PTX})_{dBm} = 10Log\frac{2}{10^{-3}} = -27dBm$$

Si ricava:

$$(L_{PRX})_{dBm} = (L_{PTX})_{dBm} + \sum G - \sum \alpha = -27 + 60 - 180 = -147dBm$$

Per ottenere un livello di potenza di almeno -74.75 dBm è necessario un amplificatore di potenza con guadagno $(G_A)_{dB}$ di almeno:

$$(G_A)_{dB} = -74.75 - (-174) = 72.25dB$$

Per determinare la distanza tra le antenne si utilizza la formula dell'attenuazione dello spazio libero

$$A_{SL} = 20Log\frac{4\pi r}{\lambda}$$

La lunghezza d’onda vale:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^9} = 0.15\text{m}$$

Essendo:

$$A_{SL} = 20\text{Log}\frac{4\pi r}{\lambda} = 120\text{dB}$$

Invertendo la formula si ottiene:

$$\frac{4\pi r}{\lambda} = 10^{\frac{120}{20}}$$

Infine si ricava:

$$r = \frac{\lambda \cdot 10^6}{4\pi} = \frac{0.15 \cdot 10^6}{12.56} = 11.94\text{km}$$