Tratto dal
Corso di Telecomunicazioni Vol. I
Ettore Panella – Giuseppe Spalierno
Edizioni Cupido

4. Energia e Potenza

Dato un segnale di ampiezza s(t) si definisce **energia totale** il valore del seguente integrale:

$$E = \lim_{\Delta t \to \infty} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} |\, s(t)\,|^2 dt \qquad (7)$$

Si definisce **potenza totale** il valore del seguente integrale:

$$P = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} |\, s(t)\,|^2 dt \qquad (8)$$

Le precedenti relazioni ci dicono che l'energia e la potenza di un segnale dipendono dal quadrato del segnale stesso.

Per un segnale periodico di periodo T, posto $\Delta t = NT$ con N intero si ha:

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{NT} \int_{-NT/2}^{+NT/2} |\, s(t)\,|^2 dt = \lim_{N \to \infty} \frac{N}{NT} \int_{-T/2}^{+T/2} |\, s(t)\,|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |\, s(t)\,|^2 dt$$

Le precedenti uguaglianze si giustificano tenendo conto che il segnale periodico, come è noto, ripete gli stessi valori ad intervalli di tempo NT.

Pertanto, la potenza di un segnale periodico coincide con quella calcolata in un periodo.

Per meglio comprendere il significato fisico si consideri un generico segnale periodico di periodo T di tensione v(t) applicato ad una resistenza R. Su di essa si sviluppa una potenza istantanea p(t) pari a:

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

Nel caso di un segnale di corrente si ha:

$$p(t) = R \cdot i^2(t)$$

Supponendo la resistenza unitaria si ricava immediatamente che la potenza istantanea coincide numericamente con il quadrato del valore istantaneo del segnale.

L'energia fornita dal segnale in un intervallo di tempo infinitesimo vale:

$$dE = p(t)dt$$

Per i segnali periodici l'intervallo di integrazione si riferisce al periodo, per cui:

$$E = \int_{-T/2}^{+T/2} v^2(t) \cdot dt$$

La potenza risulta:

$$P = \frac{E}{T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} v^2(t)\cdot dt$$

Ad esempio, per il segnale $v(t) = V_M \cos\omega t$ si ricava:

$$P = \frac{E}{T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} V_M^2 \cos^2 \omega t \cdot dt = \frac{V_M^2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1-\cos 2\omega t}{2}\cdot dt$$

Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$P = \frac{V_M^2}{2}$$

Nel caso di segnali periodici spesso si utilizza il valore efficace della tensione V_{eff} o della corrente I_{eff}. Nel caso della tensione si valuta con la seguente formula:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |v(t)|^2 \cdot dt} \qquad (9)$$

Nel caso di segnale sinusoidale si ottiene: $V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$ e $I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$

La potenza sviluppata su una generica resistenza R vale:

$$P = \frac{V_{eff}^2}{R}$$

Essa rappresenta la nota formula dell'elettrotecnica per il calcolo della potenza.

Esempio n. 7

Calcolare l'energia e la potenza totale per il segnale gradino di fig.11.

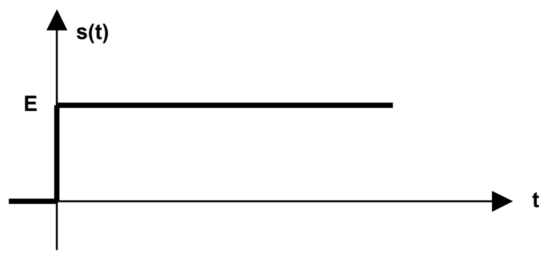

Fig. 11 Segnale a gradino.

Risoluzione

Applicando le definizioni (7) e (8) per il caso in esame si ha:

$$E = \lim_{\Delta t\to\infty}\int_{0}^{+\Delta t/2} E^2 dt = E^2 \cdot \lim_{\Delta t\to\infty}\left[\frac{\Delta t}{2} - 0\right] = \infty$$

$$P = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{0}^{+\Delta t/2} E^2 dt = E^2 \cdot \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\Delta t}{2} - 0 \right] = \frac{E^2}{2}$$

Il segnale a gradino appartiene alla categoria dei **segnali a potenza finita** denominati **segnali di potenza**. Un segnale a potenza finita presenta sempre energia infinita.

Esempio n. 8

Calcolare l'energia totale del segnale impulsivo isolato di fig.12.

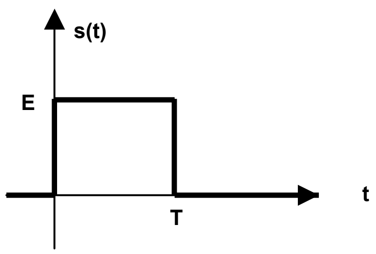

Fig. 12 Segnale impulsivo.

Risoluzione

Il segnale impulsivo isolato è un segnale limitato nell'ampiezza e nella durata. L'energia totale si determina applicando la (7) che in questo caso diventa:

$$E = \int_{0}^{T} E^2 dt = E^2 \cdot T$$

Il segnale impulsivo appartiene alla categoria dei **segnali a energia finita** denominati **segnali di energia**. Per tale segnale la potenza totale è nulla. Per questa categoria di segnali aperiodici è possibile solo definire una potenza istantanea e non una potenza media totale.

Nel caso di segnali periodici complessi per valutare la potenza o l'energia si deve sostituire al segnale s(t) il relativo sviluppo in serie di Fourier e sviluppare i calcoli per le singole componenti armoniche.

Si può dimostrare che, per un segnale periodico di cui è noto lo sviluppo di Fourier, tenendo conto delle formule (2) e (3) relative alla forma complessa dello sviluppo di Fourier, si ricava che l'energia totale vale:

$$E = \int_{-T/2}^{+T/2} s^2(t) \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} | F_n |^2 \qquad (10)$$

La precedente relazione costituisce una delle forme del **teorema di Parseval.**

Operando in termini di trasformata di Fourier, indicando con S(jω) la trasformata del segnale s(t) si può enunciare il teorema di Parseval nella seguente forma:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} | S(j\omega) |^2 \cdot d\omega$$

Effettuando un cambio di variabili e tenendo conto che $\omega = 2\pi f$, si ricava:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} | S(jf) |^2 \cdot df$$

Al termine $|S(jf)|^2$ si attribuisce il significato di energia per unità di banda passante mentre il termine $|S(j\omega)|^2$ rappresenta la **densità spettrale di energia** o semplicemente spettro di energia del segnale s(t).

5. Integrale di convoluzione

Assegnate due funzioni x(t) e h(t) si definisce **integrale di convoluzione** la funzione y(t):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

Si pone:

$$y(t) = x(t)*h(t) \qquad (11)$$

Il simbolo asterisco * indica il **prodotto di convoluzione** tra le funzioni x(t) e h(t) mentre la variabile t indica l'istante in cui viene calcolata la convoluzione.

L'integrale di convoluzione è un operatore lineare e gode delle seguenti proprietà:

- Commutativa $z(t) = x_1(t)*x_2(t) = x_2(t)*x_1(t)$
- Distributiva $z(t) = [x_1(t) + x_2(t)]*y(t) = x_1(t)*y(t) + x_2(t)*y(t)$
- Associativa $z(t) = [x_1(t) * x_2(t)]*y(t) = x_1(t)*[x_2(t)*y(t)]$

Applicando la trasformata di Fourier alla precedente relazione e moltiplicando e dividendo per $e^{j\omega\tau}$ si può scrivere:

$$\Im[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}dt = \Im[x(t)] \cdot \Im[h(t)]$$

Cioè:

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) \qquad (12)$$

Pertanto si può affermare che la trasformata di Fourier della convoluzione di due funzioni coincide con il prodotto delle trasformate di Fourier delle funzioni.

L'integrale di convoluzione risulta particolarmente utile nel calcolo della risposta di un sistema lineare ad un generica sollecitazione nota la risposta al segnale impulsivo unitario (delta di Dirac). Dalla teoria dei sistemi è noto che si definisce **funzione di trasferimento** di un sistema lineare e si indica con H(s), il rapporto tra il segnale di uscita Y(s) e quello di entrata X(s) nel dominio di Laplace. Nel caso in cui si opera in regime armonico (segnali sinusoidali) la variabile di Laplace diventa $s = j\omega$. In tal caso la funzione di trasferimento assume la forma:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

La funzione di trasferimento $H(j\omega)$ è una espressione complessa caratterizzata da un modulo e da una fase.

Supponiamo che il segnale di entrata sia la funzione impulsiva a delta di Dirac : $x(t) = \delta(t)$.

Ricordando che la trasformata di Fourier della funzione $\delta(t)$ vale 1 si ricava che:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)$$

In altre parole si può affermare che la risposta alla funzione impulsiva di un sistema lineare coincide la funzione di trasferimento del sistema stesso.

L'antitrasformata della funzione H(jω) si indica con h(t) e prende il nome di **risposta impulsiva del sistema**. Tale risposta descrive completamente il sistema poiché dipende solo dalla sua funzione di trasferimento. La risposta impulsiva può essere calcolata per via analitica o via sperimentale.

Nota la risposta impulsiva h(t) è possibile determinare l'uscita y(t) per una qualunque entrata x(t) applicando l'integrale di convoluzione:

$$y(t) = x(t)*h(t)$$

In definitiva si può affermare che se si opera nel dominio del tempo l'uscita del sistema lineare y(t) si ottiene come prodotto di convoluzione tra l'ingresso x(t) e la risposta impulsiva h(t).

Se si opera nel dominio delle frequenze per valutare y(t) si deve utilizzare la trasformata di Fourier. Si calcola la funzione:

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

Nota la Y(jω) la risposta nel dominio del tempo si ottiene antitrasformando la Y(jω):

$$y(t) = F^{-1}([Y(j\omega)]$$

In fig.13 si mostra lo schema a blocchi di un generico sistema.

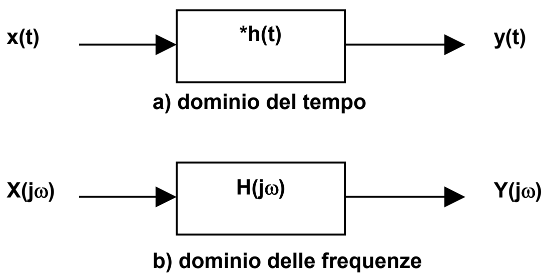

Fig. 13 Schema a blocchi di un generico sistema.

Entrambi i metodi sono utilizzati ed esistono diversi software per la simulazione e lo studio dei sistemi sia nel dominio del tempo che della frequenza. Per concludere si vuole ricordare che lo studio dei sistemi elettronici può essere condotto anche utilizzando la trasformata di Laplace che consente, tra l'altro, l'analisi del transitorio.

Esempio n. 9

Determinare la risposta ad un gradino di ampiezza E del filtro passa-basso di fig. 14 utilizzando il metodo dell'integrale di convoluzione.

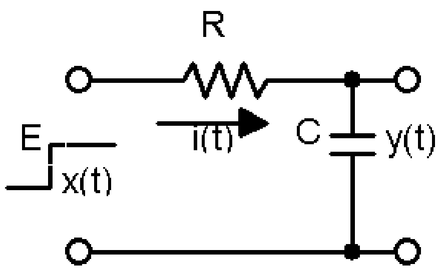

Fig. 14 Circuito RC.

Risoluzione

Per risolvere il problema si deve calcolare la risposta impulsiva del circuito e successivamente valutare l'integrale di convoluzione: y(t) = x(t)*h(t).
Si può procedere in due modi:

Dominio delle frequenze.
Ricordiamo che nel dominio delle frequenze la capacità C è sostituta dalla reattanza $X_C = 1/j\omega C$ mentre una induttanza L dalla reattanza $X_L = j\omega L$. I segnali x(t) e y(t) dalle trasformate $X(j\omega)$ e $Y(j\omega)$. Applicando la legge del partitore di tensione si ricava:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

Dalla tabella 2 delle trasformate di Fourier si riconosce che la precedente relazione corrisponde all'esponenziale decrescente. Pertanto. La risposta impulsiva vale:

$$h(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-t/RC}$$

Dominio del tempo.
Il circuito è regolato dalla seguente equazione:

$$R \cdot i(t) + y(t) = x(t)$$

La corrente che scorre nel circuito è la stessa che attraversa il condensatore. È noto che:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} = C\frac{dy(t)}{dt}$$

Sostituendo si ha:

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \qquad (13)$$

La precedente è una equazione differenziale del primo ordine a coefficienti costanti (sistema invariante nel tempo). La risposta all'impulso di Dirac si ottiene ponendo x(t) = 0 (risposta libera) poiché tale impulso è nullo per $t > 0$.
La soluzione della precedente equazione differenziale per x(t) = 0 fornisce la risposta impulsiva (equazione differenziale omogenea associata). Risolvendo si ha:

$$h(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-t/RC}$$

come per lo studio nel dominio delle frequenze.

Si determina la risposta al gradino applicando la (11). Si ha:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} E\cdot\frac{1}{RC}\cdot e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\cdot d\tau$$

Si deve tener conto che la funzione gradino x(t) = 0 per t < 0 mentre vale E per t > 0.
Inoltre, la funzione esponenziale è definita solo per valori positivi del tempo per cui deve essere: $t-\tau\geq 0$ 0 ovvero: t ≥ τ. Le precedenti osservazioni consentono di definire il limite inferiore di integrazione pari a 0 e quello superiore pari a t. Il precedente integrale diventa:

$$y(t)=\int_{0}^{t} E\cdot\frac{1}{RC}\cdot e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\cdot d\tau=\frac{E}{RC}\cdot e^{-t/RC}\cdot\int_{0}^{t} e^{\tau/RC}\cdot d\tau=\frac{E}{RC}\cdot e^{-t/RC}\left[RC\cdot e^{\tau/RC}\right]_{0}^{t}$$

$$y(t)=\frac{E}{RC}\cdot e^{-t/RC}\cdot\left[RC\cdot e^{t/RC}-RC\right]=E-E\cdot e^{-t/RC}$$

In definitiva si ha:

$$y(t) = E\cdot(1 - e^{-t/RC})$$

La precedente espressione rappresenta la nota formula della carica di un condensatore con ingresso a gradino. Tale risultato si poteva ottenere risolvendo l'equazione differenziale (9), ponendo x(t) = E, oppure applicando il metodo della trasformata di Laplace che risulta più semplice e potente nella sua applicazione pratica. In questo esercizio si è voluto però utilizzare il metodo della convoluzione per meglio comprendere il significato di tale operatore in applicazioni elettroniche.

Esempio n. 10

Calcolare la convoluzione tra i due segnali impulsivi mostrati in fig.15. Si supponga $T_1 > T_2$.

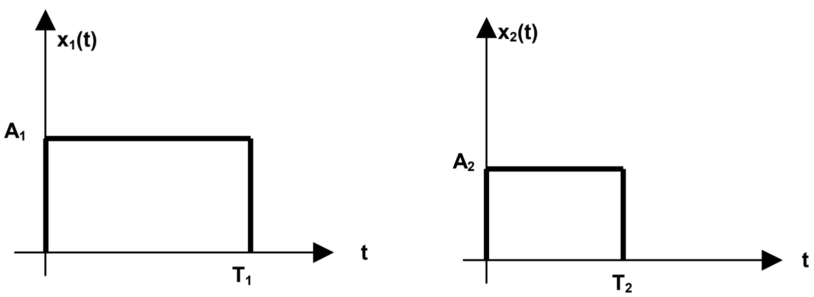

Fig. 15 Funzioni rettangolari.

Risoluzione

Per calcolare la convoluzione in un istante generico t si può procedere utilizzando la definizione fornita dalla (11). Per i segnali in esame:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau$$

La funzione $x_2(t-\tau)$ si ottiene come funzione simmetrica $x_2(-\tau)$ rispetto all'asse delle ordinate della funzione $x_2(\tau)$ con traslazione di un tempo t. Il valore della convoluzione nell'istante t si ottiene come integrale del prodotto delle due funzioni così ottenute. L'integrale rappresenta l'area della curva prodotto come schematizzato in fig. 16.

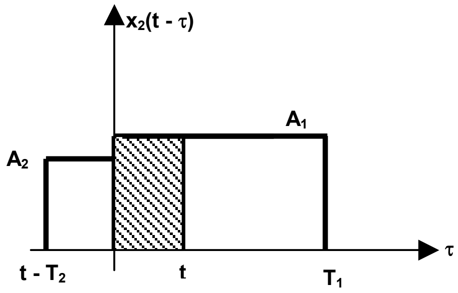

Fig. 16 Rappresentazione grafica del calcolo della convoluzione

I limiti di integrazione sono 0 e t per cui si ha :

$$y(t) = \int_0^t x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) d\tau = A_1 \cdot A_2 \cdot t$$

La procedura descritta deve essere ripetuta variando t. È facile convincersi che per :

- $t \leq 0$ — $y(t) = 0$
- $0 < t < T_2$ — $y(t) = A_1 \cdot A_2 \cdot t$
- $T_2 \leq t \leq T_1$ — $y(t) = A_1 A_2 T_2$
- $T_1 \leq t \leq T_1+T_2$ — $y(t) = A_1 A_2 (T_1+T_2 - t)$
- $t \geq T_1+T_2$ — $y(t) = 0$

In fig. 17 si riporta l'andamento dell'integrale di convoluzione.

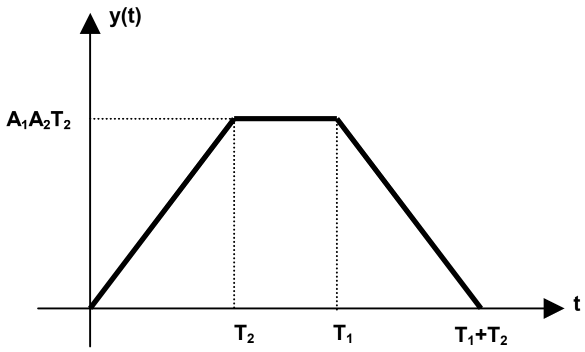

Fig. 17 Andamento dell'integrale di convoluzione per i segnali di fig. 15.

6. Integrale di correlazione

Assegnate due funzioni $s_1(t)$ e $s_2(t)$ reali o complesse, si definisce **integrale di correlazione** o semplicemente correlazione la funzione:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^*(t) \cdot s_2(t+\tau)dt \tag{14}$$

Dove $s_1^*(t)$ è il complesso coniugato del segnale $s_1(t)$ mentre τ rappresenta il valore di ricerca o di traslazione. Per funzioni reali $s_1^*(t) = s_1(t)$. In questo caso la precedente relazione diventa:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \cdot s_2(t+\tau)dt \tag{15}$$

Si dimostra che in tutti i casi la trasformata di Fourier della correlazione di due segnali vale:

$$R_{12}(j\omega) = S_1^*(j\omega) \cdot S_2(j\omega) \tag{16}$$

dove $S_1^*(j\omega)$ è il complesso coniugato di $S_1(j\omega)$ che si ottiene sostituendo j con –j nella $S_1(j\omega)$ che rappresenta la trasformata di Fourier del segnale $s_1(t)$.

La precedente relazione risulta utile nel calcolo poiché consente di valutare l'integrale di correlazione come antitrasformata di Fourier della (16), operazione semplice se si dispone delle tabelle della trasformata di Fourier.

La correlazione è utile in quelle applicazioni in cui è necessario valutare quanto due segnali sono simili tra loro. È questo il caso in cui si deve estrarre un segnale da un insieme di segnali noti affetti da rumore come per esempio nella ricezione di un segnale di eco di un radar.

La correlazione confronta i segnali utilizzando l'integrale del loro prodotto. Se i segnali sono molto diversi tra loro si ottiene un valore molto basso. Per segnali molto simili si ottengono elevati valori di correlazione.

La correlazione applicata a due segnali diversi, come nelle precedenti formule, è nota come **correlazione incrociata** o *cross correlation*.

Nel caso in cui si opera su di una sola funzione si parla di **autocorrelazione.** La (15) diventa:

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) \cdot s(t+\tau)dt \tag{17}$$

Ad esempio, l'autocorrelazione del segnale impulsivo a delta di Dirac $\delta(t)$ si valuta:

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot \delta(t+\tau)dt = 0 \text{ per } \tau \neq 0$$

Ciò è una diretta conseguenza della definizione di delta di Dirac.

La trasformata di Fourier per l'autocorrelazione vale:

$$R_s(j\omega) = |S(j\omega)|^2 \tag{18}$$

Si è ottenuto il notevole risultato che stabilisce che lo spettro dell'autocorrelazione è pari alla **densità spettrale di energia** definita nel precedente paragrafo 5.

L'analisi svolta evidenza la stretta analogia matematica esistente tra convoluzione e correlazione. Da un punto di vista grafico per valutare la correlazione $R_{12}(\tau)$ si deve moltiplicare la prima funzione per la seconda traslata senza necessità di ribaltarla rispetto all'asse delle ordinate come si deve fare per il calcolo della convoluzione.